风险价值计算说明

1.1 何谓风险价值

1.1.1 风险价值的定义

<u>VaR（风险价值）</u>

风险价值的意义简单来说就是基于决策者的意思，在特定概率、特定期间内，某特定投资组合因市场变动可能产生的最大损失。

1.1.2 一般分配的风险价值

首先定义W_0为原始投资额、R 表示资产收益率，在目标期间终了时其投资组合价值为：$W = W_0(1+R)$，而 R 的期望值以及波动度分别为μ与σ。在特定置信水平 c 下，投资组合的最低价值为$W^* = W_0(1+R^*)$，而风险价值被定义为相对于平均数的损失，其金额为：

$$\text{风险价值（相对）} = E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu) \tag{1.1}$$

有时候，风险价值被定义为绝对风险价值；即风险价值是相对于零值而非期望值，其公式如下：

$$\text{风险价值（绝对）} = W_0 - W^* = -W_0 R^* \tag{1.2}$$

1.1.3 参数分配的风险价值

计算风险价值时，通常会假设其分配为常态，并利用乘数因子或置信水平加以导出风险价值，此种方法称为参数法(parametric)。首先以 f(R)表示 R 的概率密度函数(pdf)，在置信概率水平为 1-c%情况下，投资组合收益率低于临界收益R^*的概率为：

$$\Pr ob(R < R^*) = \int_{-\infty}^{R^*} f(R)dR = c\% \tag{1.3}$$

接下来利用随机变量标准化程序，将上式转换为期望值为 0、数准差为 1 的标准正态分布。假设随机变量 Z 为标准正态分布，即 Z~N(0,1)，则上式可转换如下：

$$\Pr ob(R < R^*) = \Pr ob(Z < \frac{R^* - \mu}{\sigma}) = c\%$$

经由标准正态分布的分位数表，可查得不同 c%的相对应分位数α：

$$-\alpha = \frac{-\left|R^*\right| - \mu}{\sigma} \quad 则 \quad R^* = -\alpha\sigma + \mu \tag{1.4}$$

若我们假设参数μ与σ都是以日单位为基础来表示，则我们所考虑的时间区间Δt，也是以日为单位，将公式(1.4)代入公式(1.1)及(1.2)即可得：

$$相对风险价值 = -W_0(R^* - \mu) = W_0\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} \tag{1.5}$$

$$绝对风险价值 = -W_0 R^* = W_0(\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta t) \tag{1.6}$$

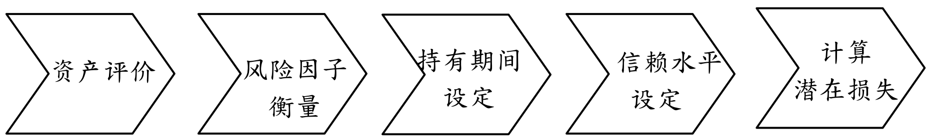
相对风险价值的估算中仅需估计资产收益率数准差σ，可避免平均收益μ估算误差问题，因此基本上会利用相对风险价值之计算方法，但本系统主要表示非预期损失部分，因此必须扣除资产之预期损益(μW)，即呈现出的是绝对风险价值。由于实务上 VAR 的评估期间甚短(通常为一天)，平均收益率通常不显著异于 0，因此在线性资产部分，将假设平均收益率为 0，即相对风险价值等于绝对风险价值；但在非线性资产部分，本系统会将期望损益考虑进去。

1.2 计算风险价值之步骤

举例来说，假设我们以 99%之置信水平去衡量 10 天期 1 百万元之投资组合资产的风险价值，则其计算之步骤如下：

- 投资组合之评价（例如：评价结果为 1 百万元）
- 衡量风险因子的波动性（例如：权益因子、利率因子与汇率因子之波动度）
- 设定资产持有期间（例如：Basel 规定为 10 天）
- 设定置信水平(例如：Basel 规范为 99%)
- 依据上述参数，选定适合之模型计算出其风险价值(例如局部评价法或完全评价法）

图 1-1 风险价值计算步骤



计算范例：

$$100M \quad \times \quad 15\%(年) \quad \times \quad \sqrt{(10/252)} \quad \times \quad 2.33 \quad = \quad 7M$$

1.3 波动度之模型建立

1.3.1 移动平均法

移动平均法为估计资产收益方差最单纯且最直接的方法，其观念是以移动固定窗口长度(T期)的方式，求算收益率偏离平均值的状况，再加以平均。移动平均法的计算公式为

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{T} \frac{(r_i - \mu)^2}{T-1} \tag{1.7}$$

其中r_i为时间i 的收益率，μ为过去T笔数据期间的平均收益率。

移动平均法之缺点在于给予过去每笔数据相同的权重，忽略了愈近期的数据应会提供愈契合现在市场状况的讯息；另外也无法描述波动性群聚(cluster)与波动性随时间而改变的特性。

移动平均法可用于具有正态分布且彼此独立之个别价格变动率之投资组合中，因其正态分布的特性，个别资产组合的投资组合也趋近于正态分布。并提供金融机构一个估计VaR快速便捷的方法，该方法系计算出过去一段期间风险因子价格变动的数准差，再求出风险价值。移动平均法的VaR计算方法如（1.8）式，其中Z_α表示置信系数为α时标准正态分布中单尾之临界值，σ_P为投资组合价格变动率的数准差，而 t 表示持有该投资组合之持有期间。

$$VaR = Z_\alpha \sigma_P \sqrt{t} \tag{1.8}$$

1.3.2 投资组合之模型说明

假设每个头寸之价格变动率服从联合正态分布，若价格变动为ΔS ，则可以（1.9）式表示，其中μ为每一个头寸之期望价格变动率，Σ为各头寸价格变动率之间的共变异矩阵，其中σ_{ij}表示为第i个头寸的价格变动率与第 j 个头寸的价格变动率之间的共方差。

$$\Delta S \quad \sim N(\mu, \Sigma) \tag{1.9}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}_{N\times 1} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

头寸价格变动率为正态分布，而投资组合是由各头寸加总而成，所以投资组合也会

服从正态分布。设CF为各头寸之现金流量，亦即每一头寸在该投资组合之权数，为$N\times 1$的矩阵，因此投资组合之期望价格变动率等于$CF'\mu$，而σ_p^2为投资组合价格变动率之方差。有了投资组合价格变动率之方差之后，即可计算风险价值。

VaR计算方式为$VaR = Z_\alpha \sigma_p \sqrt{t}$，其中$\sigma_P = \sqrt{CF'\Sigma CF}$。

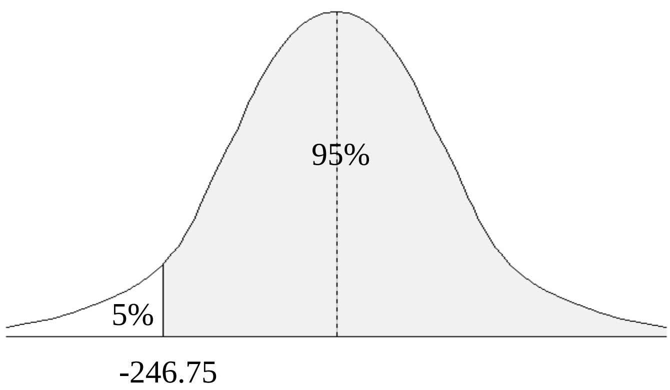
$$\Delta P \quad \sim N(\mu_P, \sigma_p^2)$$

$$\mu_p = CF'\mu$$

$$\sigma_P^2 = CF'\Sigma CF$$

举例来说，假设预估数据的平均数收益为 0 万元，数准差为 150 万元，在 95%概率下，如果市场的变动是往有利方向变动，对企业而言将不致造成任何问题。反之，如果市场的波动是往不利方向变动，则对企业将有相当的影响，因此企业应摒除统计上双尾对称 95%置信区间的估计法，而以单尾观点，考虑最大估计损失。简言之，最大估计损失为 95%置信区间单尾（不利一方）估计，左侧的置信区间落在$\mu - 1.645\sigma = -246.75$萬元，即为最大估计损失。（如图 1-2 所示）

图 1-2 收益正态分布



$\mu = 0 \qquad \sigma = 150$萬

概率 95%

最大估计损失为$\mu - 1.645\sigma = -246.75$万元

1.3.3 指数移动平均法(EWMA)

指数移动平均法又称为 RiskMetrics Method 其计算方式是以 Asset-Normal 为前提假设，RiskMetrics 基本上是以指数加权移动平均法来计算风险价值，主要精神在权数会随着时间不同而有差异，距观察时点越近的其权数越大，距观察时点越远权数越小。指数移动平均法的变动率计算公式如（1.10）式。此法假设过去信息与邻近信息对参数估计的效果应为不同，故给予不同的权数，其模式如下(1.10)：

$$\sigma_{t+1}=\sqrt{(1-\lambda)\sum_{s=t-k}^{t}\lambda^{t-s}\left(X_s-\mu\right)^2} \tag{1.10}$$

其中 σ_t = 从第 t 天起开始的投资组合估计数准差

k = 移动平均所包含的天数

X_s = 投资组合价值在第 s 天的收益率

μ = 投资组合价值平均变动

λ= 衰退因子，估计值愈久，权数愈小

指数移动平均公式分解：

$$\sigma_{t+1}^2=(1-\lambda)(x_t-\mu)^2+\lambda\sigma_t^2 \tag{1.11}$$

$$=(1-\lambda)\left[(x_t-\mu)^2+\lambda(x_{t-1}-\mu)^2+\lambda^2(x_{t-2}-\mu)^2+\ldots\right]$$

例如： $\sigma_{31}^2=(1-\lambda)\left[(x_{30}-\mu)^2+\lambda(x_{29}-\mu)^2+\lambda^2(x_{28}-\mu)^2+\ldots\right]$

指数加权移动平均法其共方差之计算公式如(1.12)式：

$$\sigma_{xy,t+1}^2=\sum_{i=0}^{\infty}\omega_i X_{t-i}Y_{t-i} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}
&=(1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i X_{t-i}Y_{t-i}\\
&=(1-\lambda)\left[X_tY_t+\lambda X_{t-1}Y_{t-1}+\lambda^2X_{t-2}Y_{t-2}+\ldots\right]\\
&=(1-\lambda)X_tY_t+\lambda\left\{(1-\lambda)\left[X_{t-1}Y_{t-1}+\lambda X_{t-2}Y_{t-2}+\lambda^2X_{t-3}Y_{t-3}+\ldots\right]\right\}\\
&=(1-\lambda)X_tY_t+\lambda\sigma_{xy,t}^2
\end{aligned}$$

指数移动平均法中，由于结果可能产生敏感度差异，因而可以选择的参数大致有「衰退因子」与「衡量期间」。衰退因子的选取，隐含着对于离目前越近时间的信息，给予越重视的程度，在 RiskMetrics 技术手册中，对于美国股市分析最适的衰退因子，估计值为 0.94，我们对于台湾股票、利率、外汇市场作衰退因子研究，其结果与 RiskMetrics 差异不大，其日资料之衰退因子为 0.93。

1.3.4 加权移动平均法

由上述两种方差计算方式可知，两者差异主要为对于历史收益权数前者为均等，后者为依时间递增，代表历史对于现在的影响程度应该有所不同，这样的思考下，本系统另外提供使用者对于所选取的历史区间数据自行订定权数，且权数加总应为 100%。其方差表示如下：

$$\sigma_{t+1}^{2}=\alpha_{t}(x_{t}-\mu)^{2}+\alpha_{t-1}(x_{t-1}-\mu)^{2}+\alpha_{t-2}(x_{t-2}-\mu)^{2}+\ldots \qquad (1.13)$$

α = 各日变异权数

表 1-1 加权平均权数设定

移动加权平均				合计
日期	1~10	11~20	21~30	30 天
变异权数	50%	30%	20%	100%

天数：由使用者自行分割,但分割后之总天数应等于所定之观察天数

变异权数：所分割区间应有相关之权数,权数合计等于 100％

1.3.5 GARCH 法

典型的 ARCH(q)模型可以表示如下：

$$y_t \mid \Omega_t \sim N(x_t a, \sigma_t^2) \qquad (1.14)$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t a \qquad (1.15)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \qquad (1.16)$$

GARCH 可说是一般化的 ARCH 模型，将 AR 和 MA 的观念用在估计条件方差。如前述(1.14)~(1.16)式，典型的 GARCH(p,q)模型可以表示如下：

$$y_t \mid \Omega_t \sim N(x_t a, \sigma_t^2) \qquad (1.17)$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t a \qquad (1.18)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 \qquad (1.19)$$

而 Bollerslev (1992)实证发现 GARCH 大部分的情况中，GARCH(1,1)已经是一个良好的波动模型，因此我们使用 GARCH(1,1)为最适模型。

1.3.6 IGARCH 法

IGARCH 模型即对 GARCH 的参数做了限制，IGARCH(p,q)模型可以表示为：

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-i}^2 \tag{1.20}$$

条件为：$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i = 1$

1.3.7 TGARCH 法

考虑杠杆效果而加以处理的模型称之为 TGARCH(Threshold GARCH)，杠杆效果指的是该资产的上一期价格若下跌，代表上一期的收益率为负值，则会增加持有该资产的风险；而上一期价格若上涨，则持有该资产的风险会较低。如果 y_t 代表某金融资产在 t 时间之收益率，以 $y_t = a_0 + \varepsilon_t$ 表示，则当 ε_{t-1}<0 时，表示上一期的收益低于 a_0，因为 $\varepsilon_{t-1} = y_{t-1} - a_0$ <0，可以说对金融资产而言是个坏消息，而当 $\varepsilon_{t-1} \geqq 0$ 时，表示对金融资产是好消息。

TGARCH 模型如下：

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 D_{t-1} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{1.21}$$

$$D_{t-1} = 1 \text{ if } \varepsilon_{t-1} < 0$$

$$= 0 \text{ if } \varepsilon_{t-1} > 0$$

上式估计的结果若是 γ>0，且在统计检定上具显著意义，我们就可以说杠杆效果存在。而如果前一期是坏消息，$D_{t-1} = 1$，则(1.21)的条件方差则变成 $\sigma_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \gamma)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$，而若前一期是好消息，$D_{t-1} = 0$，则(1.21)的条件方差则变成 $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$。

1.4 共方差之计算

■ 移动平均法

$$Cov_{t+1}(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \tag{1.22}$$

■ 指数平均法

$$Cov_{t+1} = (1-\lambda)(x_t - \mu_x)(y_t - \mu_y) + \lambda Cov_t \tag{1.23}$$

$$\mathrm{Cov}_{t+1}^2 = (1-\lambda)\left[(x_t - \mu_x)(y_t - \mu_y) + \lambda(x_{t-1} - \mu_x)(y_{t-1} - \mu_y) + \lambda^2(x_{t-2} - \mu_{t-2})(y_{t-2} - \mu_y) + \cdots\right]$$

$$Cov_{31}^2 = (1-\lambda)\left[(x_{30} - \mu_x)(y_{30} - \mu_y) + \lambda(x_{29} - \mu_x)(y_{29} - \mu_y) + \lambda^2(x_{28} - \mu_x)(y_{28} - \mu_y) + \cdots\right]$$

■ 加权平均法

$$Cov_{t+1}^2 = \lambda_t(x_t-\mu_x)(y_t-\mu_y)+\lambda_{t-1}(x_{t-1}-\mu_x)(y_{t-i}-\mu_y)+\lambda_{t-2}(x_{t-2}-\mu_x)(y_{t-2}-\mu_y)+\cdots$$

(1.24)

1.4.1 方差法运算说明

代号及公式说明如下：

SR：证券收益率（上证）

SR1：证券收益率（深证）

DR1：指标债券收益率

ER1：汇率收益率

PR：美元存款收益率

M（共方差矩阵）利用 SR、SR1、DR1、ER1、PR ..的数据计算共变异矩阵

方差：$Var(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$

共方差：$Cov(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{n-1}$

表 1-2　M(共方差矩阵)

	股價-SR	日圓-SR1	美元-DR1	利率30天-ER1	利率1年-PR	
股價-SR	Var(SR)	Cov(SR1,SR)	Cov(DR1,SR)	Cov(ER1,SR)	Cov(PR,SR)	…
日圓-SR1	Cov(SR1,SR)	Var(SR1)	Cov(DR1,SR1)	Cov(ER1,SR1)	Cov(PR,SR1)	…
美元-DR1	Cov(DR1,SR)	Cov(DR1,SR1)	Var(DR1)	Cov(ER1,DR1)	Cov(PR,DR1)	…
利率30天-EF	Cov(ER1,SR)	Cov(ER1,SR1)	Cov(ER1,DR1)	Var(ER1)	Cov(PR,ER1)	…
利率1年-PR	Cov(PR,SR)	Cov(PR,SR1)	Cov(PR,DR1)	Cov(PR,ER1)	Var(PR)	…
	:	:	:	:	:	

1.5 风险价值运算模型

1.5.1 部分评价法与全值评价法

基本上衡量风险价值的方法可分为两类，第一类是部分评价法(local valuation)，系以局部导数推论可能的波动情况，衡量投资组合的风险；如 Delta 常态法(delta-normal method)使用线性来推导并假设正态分布。因为 Delta 常态法相当容易运算，以一阶导数的分析估计值来衡量风险，当风险来源有限的时候，此方法对投资组合的评量是最适当的。

第二种方法是全域评价法(Full valuation)。全域评价法是指完整的对投资组合重新订价，计算在不同价格水平下，其投资组合损益的情形：

$$dV = V(S_1) - V(S_0) \tag{1.25}$$

其中新的价格 S_1 系由模拟而来，其模拟方法有：历史模拟法及蒙特卡罗模拟法。

1.5.2 Delta 常态法

Delta-normal 法仅考虑一阶导数的风险变动。例如投资组合在期初的价值为：

$$V_0 = V(S_0) \tag{1.26}$$

定义 Δ_0 为一阶偏导数，代表现有头寸所组成的投资组合对价格改变的敏感度，于是潜在损失 dV 为：

$$dV = \left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_0 dS = \Delta_0 \times dS \tag{1.27}$$

若分配为常态，投资组合的风险价值可由暴险程度的乘积导出，标的变量的风险价值为

$$VAR = \left|\Delta_0\right| \times VAR_s = \left|\Delta_0\right| \times (\alpha\sigma S_0) \tag{1.28}$$

1.5.3 Delta-Gamma 近似法

Delta-Gamma 为 Delta-normal 的延伸，考虑到投资组合价值的二阶导数，以提升线性估计的质量：

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial V}{\partial \sigma} d\sigma + ... = \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma dS^2 + \upsilon d\sigma + ... \tag{1.29}$$

其中 Γ 为投资组合价值的二阶导数，υ 是波动率的敏感度。

我们利用 Delta-Gamma 法计算买入买权的风险价值，可得：

$$\begin{aligned} VAR &= V(S_0) - V(S_0 - \alpha\sigma S_0) \\ &= V(S_0) - [V(S_0) + \Delta(-\alpha\sigma S) + \frac{1}{2}\Gamma(-\alpha\sigma S)^2] \\ &= \left|\Delta\right|(\alpha\sigma S_0) - \frac{1}{2}\Gamma(\alpha\sigma S)^2 \end{aligned}$$

上式对于买入、卖出买权或卖权都是有效的。如果Γ是正的，表示选择权为净买入头寸，第二项将会减少线性的风险价值，表示选择权的下方风险小于由 delta 所估计的结果；如果Γ是负的，则表示选择权为净卖出头寸，风险价值将增加。

但是当价值的函数 V(S)变得复杂时，此转换就不适用了，因此回到公式(1.29)，现在的问题是要如何处理随机变量 dS 与 dS^2。

最简单的方法称为 delta-gamma-delta 法。将二阶估计式(1.29)左右二边取方差，可得：

$$\sigma^2(dV) = \Delta^2\sigma^2(dS) + (\frac{1}{2}\Gamma)^2\sigma^2(dS^2) + 2(\Delta\frac{1}{2}\Gamma)\operatorname{cov}(dS, dS^2) \tag{1.30}$$

若变量 dS 为正态分布，所有奇次动差(odd moments)为零，则上式中的最后一项即可消去。在同样假设下，$V(dS^2) = 2V(dS)^2$ ，则方差简化为：

$$\sigma^2(dV) = \Delta^2\sigma^2(dS) + \frac{1}{2}[\Gamma\sigma^2(dS)]^2 \tag{1.31}$$

假设现在 dS 与 dS^2 为联合正态分布，则 dV 为正态分布，风险价值为：

$$VAR = \alpha\sqrt{(\Delta S\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\Gamma S^2\sigma^2)^2} \tag{1.32}$$

其中

Delta 风险头寸 ＝ $\alpha \cdot \sqrt{\Delta^2 \cdot S^2 \cdot \sigma^2}$

Gamma 风险头寸 ＝ $VAR(dV) = \alpha \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left[\Gamma S^2\sigma^2\right]^2}$

1.5.4 多因子分析法(multi-factor models)

相关性乃是投资组合风险背后最重要的驱力。然而，当资产数目过于庞大时，可能会产生一些问题：(1)投资组合的风险可能不是正值，(2)无法精确地估计相关性。因此常常会选择适当的市场指数来取代，以简化其共变量矩阵。其中一个简单的模型称为对角线模型(diagonal model)，其假设所有资产的共同变动仅源于单一共同因子，亦即市场因子，其模型为：

$$Ri = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i \tag{1.33}$$

即资产的收益率来自市场的收益率 R_m 以及一个非系统性的项目 ε_i，此一非系统性的项目与市场以及各资产间皆不相关。因此，其共方差矩阵可分解成：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_N \end{bmatrix} \sigma_m^2 + \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon,1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{\varepsilon,N}^2 \end{bmatrix}$$

则投资组合的方差为：

$$V(R_P) = V(w'R) = w'\sum w = (w'\beta\beta'w)\sigma_m^2 + w'D_\varepsilon w \qquad (1.34)$$

如果单一因子模型尚有不足时，多因子模型则可提供较佳的准确性，其模型如下：

$$R_1 = \alpha_1 + \beta_{11}Y_1 + \beta_{12}Y_2 + \dots\dots\dots\dots + \beta_{1k}Y_k + \varepsilon_1$$

$$R_2 = \alpha_2 + \beta_{21}Y_1 + \beta_{22}Y_2 + \dots\dots\dots\dots + \beta_{2k}Y_k + \varepsilon_1$$

$$\vdots$$

$$R_n = \alpha_n + \beta_{n1}Y_n + \beta_{n2}Y_n + \dots\dots\dots\dots + \beta_{nk}Y_k + \varepsilon_n$$

假设 $R_1,\dots.R_n$ 为 N 个资产的收益率，$Y_1,\dots.Y_n$ 为N个市场因子，且每个因子都互相独立。加入多重因子后，共变量矩阵的结构将会较为繁复：

$$\sum = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \cdots & \cdots & \sigma_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{1k} & \beta_{2k} & \cdots & \beta_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon,1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon,2}^2 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \sigma_{\varepsilon,k}^2 \end{bmatrix}$$

计算出投资组合资产之共变异矩阵及现金流量之后，即可利用共变异矩阵乘上现金流量矩阵再乘以累积正态分布之置信系数，则可计算出此投资组合之风险价值。

本系统所提供的市场因子为大盘及各产业之指数、大华公债指数及有效汇率指数，主要用于衡量仅具单一种风险因子之资产，即股票、基金及外汇资产，故此方法仅限计算这三种资产。

1.5.5 历史模拟法(Historical Simulation)

顾名思义历史模拟法，即是完全由实际的历史数据中，求算资产组合风险价值的一种方法。在方法的操作上，历史模拟法利用所持有的资产组合，过去一段期间的历史价格时间序列，搭配目前持有资产的头寸，重新建构资产组合未来收益值的分配之后，再经过由小到大顺序排序，依百分位数求算特定置信水平下之风险价值。举例说明如下：

假设各项资产过去 101 天的历史价格日数据已知，则若欲计算投资组合持有一天的风险价值，其操作流程包含下列五个步骤：

步骤一：利用各资产过去历史价格变动量，配合各资产目前的价格，计算各资产的未来价格仿真值。

以第 i 项资产为例。101 笔历史价格数据时间序列：

$$P_i(-101)\text{，}P_i(-100)\text{，}P_i(-99)\ldots\ldots\text{，}P_i(-1)\ldots\ldots$$

可计算出 100 笔价格收益率：

$$R_i(100)=\frac{P_i(-100)-P_i(-101)}{P_i(-101)}$$

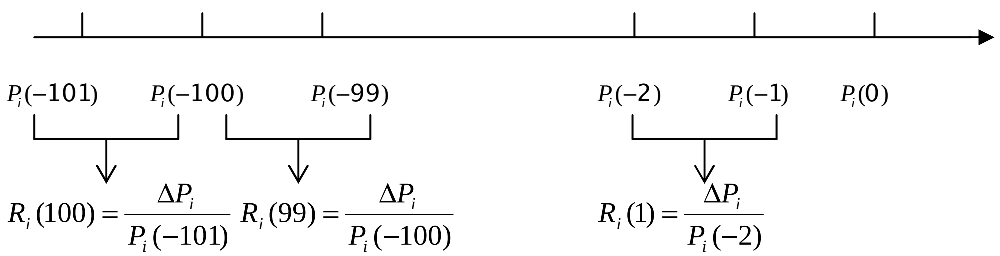
$$R_i(99)=\frac{P_i(-99)-P_i(-100)}{P_i(-100)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$R_i(1)=\frac{P_i(-1)-P_i(-2)}{P_i(-2)}$$

以图形表示如下：

图 1-3 历史模拟步骤



将此 100 笔收益率，乘上目前该资产的价格 $P_i(0)$，则可模拟出一天后该资产的预测价格，共得出 100 笔：

$$P_i^*(1)=P_i(0)\times(1+R_i(1))$$

$$P_i^*(2)=P_i(0)\times(1+R_i(2))$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$P_i^*(100) = P_i(0) \times (1 + R_i(100))$$

同理，N 项资产的价格仿真值皆可利用此步骤得出：

$P_i^*(\tau) \quad ,i = 1,2,\cdots,N$ ； $\tau = 1,2,\cdots 100$ 。

步骤二：将步骤一所求得的各资产价格仿真值，依目前所持有资产之头寸权重，重新计算投资组合的价值。如此可得出 100 笔资产价值的仿真值：

$$\begin{array}{cccccc} P_1^*(1) & P_2^*(1) & P_N^*(1) & \longrightarrow & V^*(1) \\ P_1^*(2) & P_2^*(2) & P_N^*(2) & \longrightarrow & V^*(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_1^*(100) & P_2^*(100) & P_N^*(100) & \longrightarrow & V^*(100) \end{array}$$

步骤三：以各资产目前价格计算投资组合目前的价值。

$$P_1(0) \quad P_2(0) \quad \ldots\ldots \quad P_{100}(0) \qquad \longrightarrow \qquad V(0)$$

步骤四：比较步骤二所求出之未来价值仿真值与资产目前的价值，如此可得出 100 笔未来收益模拟值。

$$\begin{aligned} \Delta V^*(1) &= V^*(1) - V(0) \\ \Delta V^*(2) &= V^*(2) - V(0) \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ \Delta V^*(100) &= V^*(100) - V(0) \end{aligned}$$

步骤五：将所建构的未来收益模拟值 $(\Delta V^*(\tau) \quad \tau = 1,2,\cdots,100)$ ，由小到大顺序排列，在给定置信水平为 1-α 之下，依百分位数即可得出风险价值。

虽然历史模拟法对于历史收益率的使用方式是类似一种排序的概念，去选取较差的情形作为风险价值的依据，但是并非所有金融商品都是线性的，有些金融商品的价格来源需运用理论模型去运算出来，例如选择权计算模式等；另外在该利率类金融商品中，需要利用插补的方式将现金流量分配至利率风险因子时(请详附录 2A)，因此在暴险金额的运算仍需要估计历史波动之数准差。

1.5.6 蒙特卡罗模拟法

蒙特卡罗仿真法是假设资产价格的变动服从某随机过程的型态，利用计算机仿真，在目标时间范围内，产生随机价格的路径，并依此建构资产收益之分配，进而推估风险价值，如此不但涵盖变量的所有可能状况，也可以处理非常态模型。蒙特卡罗模拟法和历史模拟法的基本概念类似，但不同之处在于历史模拟法是以过去的市场交易数据来当作未来的仿真值，蒙特卡罗模拟是从所指定的随机过程抽取变量来当作市场(风险)因子未来变动量的模拟值。

假设目前投资组合内共有 n 项资产，以蒙特卡罗模拟法计算持有一日之 VaR 的操作程序上主要包含四个步骤：

步骤一：计算投资组合各资产的现值 $P(1)$、$P(2)\cdots P(n)$

步骤二：选择适合描述资产价格路径的随机过程(权益资产为 GBM;利率资产为 Vasicek 模型)。

步骤三：依随机过程仿真虚拟的资产价格路径。

步骤四：综合模拟结果，建构资产收益率分配，并以此计算投资组合的风险价值。

由于本系统所使用的为多变量模型，且为蒙特卡罗仿真法中之随机模型法，因此仅就蒙特卡罗仿真法中随机模型法加以介绍。

1.5.7 蒙特卡罗随机过程仿真路径

■ 几何布朗运动模型(Geometric Brownian Motion Model ; GBM)

其为选择权定价理论的基础，属于韦那过程(wiener process)，特性在假设资产价格变动量与时间无关（与过去变动量无关，亦无法预测未来值)，其模型如下：

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \tag{1.35}$$

上式代表资产价格于短时间内(dt)变动行径。

dS_t 代表 t 期资产价格变动量

S_t 代表 t 期资产价格

μ_t 代表 t 期资产收益率

σ_t 代表 t 期资产收益率之数准差(波动性)

dw_t 代表正态分布随机变量，方差为 dt（称为布朗运动)，平均数为 0

布朗运动

令变动 w 为韦那过程系经由一随机冲击对资产价格产生影响，其于短时间(dt)内 w 之变化量为 $dw = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ ；ε 代表正态分布随机变量;ε ～N(0,1)，dw 亦服从期望值为零，数准差为 $\sqrt{\Delta t}$ 的正态分布即 $dw \sim N(0, \Delta t)$

资产价格行径仿真

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dw$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dw \qquad \frac{dS}{S} \sim N(\mu dt, \sigma^2 dt)$$ ；本系统 μ 假设为 0

$$\Delta S_t = S_{t-1}(\mu\Delta t + \sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}) \quad , \quad t=1,2\ldots,N$$

■ 单因子 Vasicek 模型

Vasicek 是最先运用均数复归(mean-reverting)的概念在利率模型中，其模型如下：

$$dr = \alpha(\mu - r)dt + \sigma dw \tag{1.36}$$

其中 α 为均数复归调整速度，μ 为瞬间利率的平均值，σ 为瞬间利率的数准差。该模型采用 Ornstein-Uhlenbeck process,亦称为弹性的随机漫步(elastic random walk)。一般的随机漫步或韦那过程为非定态的过程(unstable process) ,经过一段长时间以后将会发散至无限大的值；而 O-U 过程为一定态分配(stable distribution)，其瞬间趋势项 $\alpha(\mu - r)$ 表示瞬间利率将以 α 的调整速度趋向长期平均值，此一性质使得短期利率动态过程为均数复归。假定目前的瞬间利率为 r(t)，则未来某一时点 s 其瞬间利率的条件期望值与方差为

$$\begin{cases} Et[r(s)] = r(t)e^{-\alpha(s-t)} + \mu(1 - e^{\alpha(s-t)}) \\ \operatorname{var}_t[r(s)] = \dfrac{\sigma^2(1 - e^{-2\alpha(s-t)})}{2\alpha} \end{cases}$$

则离散自我回归式 AR(1)如下

$$r(s) = r(t)e^{-\alpha(s-t)} + \mu(1 - e^{-\alpha(s-t)}) + \varepsilon(s) \tag{1.37}$$

将上式简化成下列的回归式：

$$r_t = a + br_{t-\Delta t} + e_t \tag{1.38}$$

利用市场短期利率数据跑回归方程式，则可解出 a、b 值，并进一步解出参数α、μ，其式子如下：

$$\begin{cases} a = \mu(1-b) \\ b = e^{-\alpha\Delta t} \end{cases}$$

则在时点 t，到期日为 T 之零息债券价格为

$$P(t,T) = e^{-E_t(R) + \frac{V_t(R)}{2}}$$

$$E(R) = r(t)\left(\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}\right) + \left(\mu - \frac{q\sigma}{\alpha}\right)\left[T - t - \left(\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}\right)\right]$$ ，其中 q=-0.2718 常数*

$$V(R) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\left[T - t - \frac{e^{-2\alpha(T-t)}}{2\alpha} + 2\frac{e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} - \frac{3}{2\alpha}\right]$$

算出债券价格 P，可以进一步反推出连续复利 R，公式如下：

$$P = e^{-Rt} \tag{1.39}$$

将得到之参数代入(1.36)，并以此式作为利率之仿真路径。

1.5.8 蒙特卡罗模拟法相关性之处理

当投资组合包含多项资产时，假设有n项，需考虑各资产间之相关性，因此在仿真多变量常态随机变量时我们必须先使用 Cholesky 分解方法将n个资产价格相关性矩阵分解求得一个$n \times n$的下三角矩阵(Lower Triangular)，再利用该矩阵与$N(0,1)$随机变数之$n \times 1$矩阵相乘即可得到n个具有相关性的多变量常态随机变量，其程序步骤如下：

步骤一：利用 Cholesky 分解法分解对称的$n \times n$相关性矩阵Σ，求得一个 Lower Triangular 矩阵A，使得$\Sigma = AA'$。

假设 $$\Sigma = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1j} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ v_{i1} & & v_{ij} & & v_{in} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nj} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

*The derivation is given by Campbell (1986)

使得$\Sigma = AA'$ 则 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{ij} & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $A'=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$

公式求解法：令i, j分别为$n\times n$对称矩阵的列（Row）与行（Column）。所以矩阵A的每一个元素可经由下列公式求出：

$$a_{ii} = \left(v_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2\right)^{0.5} \qquad a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}}\left(v_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a_{jk}\right)$$

步骤二：解出A矩阵内的每一个元素后，将A矩阵与$n\times 1$的随机常态变量矩阵相乘，即可求得n个多变量相关常态随机变量Y_i，其中ε_i 是从$N(0,1)$取出的随机变数。

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

步骤三：重复步骤二，则可得.到一连串各资产收益率的预估值，在给定置信水平下以此求算投资组合的风险价值。

1.5.9 各方法之优缺点比较

■ delta gamma 近似法

优点：☆计算较为容易，可计算增额风险及成份风险，易于分析。

缺点：★忽略「厚尾」之问题。

★无法衡量非线性资产之投资风险价值。

■ 历史模拟法

优点：☆此方法是建立在真正的价格基础上，可允许非线性数据或非正态分布的数据。

☆可考虑到「厚尾」的问题。

☆不依赖评价模型，因此不会承受模型风险。

缺点：★必须拥有足够之历史数据，期间太短可能会受限于估计误差。

★若样本期间中省略了重要事件，则尾端可能无法准确地呈现，亦可能包括了未来不会发生的事件。

■ 蒙特卡罗模拟法

优点：☆可计算非线性资产头寸的价格风险、波动性风险。

☆可处理具时间变异（time-variant）的方差、厚尾、不对称等非正态分布和极端状况。

缺点：★需要烦杂的计算机技术和大量的重复抽样，既昂贵且费时。

★着重于代表价格变动的随机模型，因此若选择不当，将会导致模型风险(model risk)的产生。

★仿真所需的样本数必须要大且足够，才能使估计出的分配得以与真实的分配接近。